（2017年 問3）
p, q：自然数

$\tan\alpha = \dfrac{1}{p}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$

$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ — ①　のとき，p?　q?

【解法】
[まずは加法定理を使って①の式を分解し，p, q の関係式を導く]
①より，

$$2 = \tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta} = \frac{\tan\alpha + \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}}{1-\tan\alpha\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}} = \frac{(1-\tan^2\beta)\tan\alpha + 2\tan\beta}{(1-\tan^2\beta) - 2\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{(1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^2)\left(\dfrac{1}{p}\right) + 2\left(\dfrac{1}{q}\right)}{(1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^2) - 2\left(\dfrac{1}{p}\right)\left(\dfrac{1}{q}\right)} = \frac{(q^2-1)+2pq}{(q^2-1)p-2q}$$

よって，$2(q^2 - 1)p - 4q = (q^2 - 1) + 2pq$

[この式と，p, q が自然数であることを使って問題を解くのであるが，成功するか否かは別として，いろいろな (整数問題) のアプローチが考えられる．qの2次式なので，qの式として整理して，実数条件からpの不等式を導びこうとしたが，$D = (p + 2)^2+(2p-1)^2$ となり，$D \geqq 0$ から p の制約条件が得られない．それで，pの式として整理してみることにする]

pについて整理して，
$(2q^2 - 2q - 2)p = q^2 + 4q - 1$　— ②

[この式で，qにいろいろな自然数を代入したとき，pが自然数になる場合を想像してみる．まず気づくのが ②は $a = 2q^2 - 2q - 2$, $b = q^2 + 4q - 1$ として，$ap = b$ の形だが，a, b ともに q の2次式で，a の q^2 の係数は 2，b の q^2 の係数は 1 で，たいていの q で a の方が b より大きい (qの1次より2次の方が影響する)，しかし pが自然数 ($\geqq 1$) なので $a \leqq b$ でないといけない．したがって，qの候補が絞られることがわかり，この線で問題が解けそうである]

$1 \leqq p = \dfrac{q^2+4q-1}{2q^2-2q-2}$　— ③

[分母を払いたいので，以下で分母の符号を調べる]

$y = 2q^2 - 2q - 2 = f(q)$ とおく．この2次グラフの対称軸は $q = \dfrac{1}{2}$ で，

$f(1) = -2$, $f(2) = 2 > 0$ となり，$q \geqq 2$ で $f(q) > 0$.
$q = 1$ のとき，②は $-2p = 4$ となり，pは自然数にならない．
$q \geqq 2$ のとき，③の分母は正なので，$2q^2 - 2q - 2 \leqq q^2 + 4q - 1$.
すなわち $q^2 - 6q - 1 \leqq 0$ で，これを解いて $3 - \sqrt{10} \leqq q \leqq 3 + \sqrt{10} = 6.\cdots$

一方，②の左辺は偶数なので ②の右辺の形から q は奇数であることが必要.

したがって，$q = 3, 5$ が必要.

$q = 3$ のとき，$p = 2$,

$q = 5$ のとき，$p = \dfrac{44}{38}$ で不適. よって $(p, q) = (2, 3)$ □

この問題で学ぶこと

・[基本] 三角関数の加法定理.

・多項式の増大スピードを支配する最高次の係数.

・整数問題の基本アプローチ3 (変数の範囲を絞って候補を出す)：
　自然数の場合は，条件 "$\geqq 1$" が使える.

・整数問題の場合，例外は数が限られるので各例外を具体的にチェックして成否が確認できる：
　"$q = 1$のとき".